113 年特種考試地方政府公務人員及離島地區公務人員考試試題

考試別：地方政府公務人員考試　　賴明老師解題

等　別：三等考試

類　科：測量製圖

科　目：誤差理論及實務

一、假設某一部全測站儀器其測距精度為±(2 mm＋3 ppm)、測角精度為±10″，若將該儀器運用於二維導線測量，則該導線之網形應以具備何條件為最佳（例如角度範圍或邊長範圍）？（25分）

1.《考題難易》★★★☆☆
2.《解題關鍵》關鍵字：測距精度，測角精度為，二維導線測量。 重點提要：角度範圍或邊長範圍。
3.《命中特區》書名：測量學 (含平測、衛星、大地)　上課教材 作者：賴明 章節出處：第五章　導線測量　之　第 1 節　導線測量基本觀念

【擬答】

已知：全測站儀的測距精度為±(2 mm+3 ppm)、測角精度為±10"

假設：導線邊長=L (m)，測距精度 $\sigma_L=\pm\sqrt{2^2+\left(3\times\frac{L}{1000}\right)^2}=\pm\sqrt{4+\left(\frac{3}{1000}\right)^2\times L^2}$

㈠測距精度=測角精度

$$\frac{\sigma_L}{L}=\frac{\sigma_\theta''}{\rho''}，\frac{\sigma_L}{L\times1000}=\frac{10''}{206265''}，\sigma_L=\frac{L}{20.6265}，\sigma_L{}^2=\left(\frac{1}{20.6265}\right)^2\times L^2$$

$$4+\left(\frac{9}{10^6}\right)\times L^2=\left(\frac{1}{20.6265}\right)^2\times L^2，4=L^2\times\left[\frac{1}{20.6265^2}-\frac{9}{10^6}\right]，L=41.332\,m$$

測角精度=±10"，精度甚低。

㈡與導線測量相關的測量規範

◎以精密導線測量方法實施加密控制測量之精度規範：測距精度 $\frac{1}{60,000}$

◎二等精密導線測量：甲級測距精度 $\frac{1}{300,000}$，乙級測距精度 $\frac{1}{120,000}$

1. 測距精度 $\frac{1}{60,000}$

$$\frac{\sigma_L}{L}=\frac{1}{60,000}，\frac{\sigma_L}{L\times1000}=\frac{1}{60,000}，\sigma_L=\frac{L}{60}，\sigma_L{}^2=\left(\frac{1}{60}\right)^2\times L^2$$

$$4+\left(\frac{9}{10^6}\right)\times L^2=\left(\frac{1}{60}\right)^2\times L^2，4=L^2\times\left[\frac{1}{3600}-\frac{9}{10^6}\right]，L=122.000\,m$$

2. 測距精度 $\frac{1}{300,000}$

$$\frac{\sigma_L}{L}=\frac{1}{300{,}000}，\frac{\sigma_L}{L\times 1000}=\frac{1}{300{,}000}，\sigma_L=\frac{L}{300}，{\sigma_L}^2=\left(\frac{1}{300}\right)^2\times L^2$$

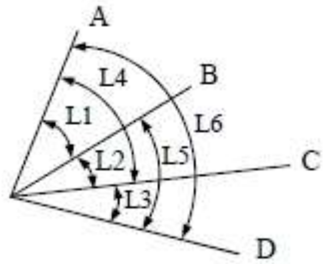
$$4+\left(\frac{9}{10^6}\right)\times L^2=\left(\frac{1}{300}\right)^2\times L^2，4=L^2\times\left[\frac{1}{300^2}-\frac{9}{10^6}\right]，L=1376.500m$$

∴ 邊長範圍為 41.332m 至 1376.494m

㈢角度範圍

導線測量之角度範圍比照三角測量：30°～120°

二、某人欲觀測下圖中 A、B、C、D 等四個方向之夾角，已知觀測量為 L1 至 L6，請說明本次測量之多餘觀測數，並列出相對應的觀測方程式。（25 分）



1.《考題難易》★★★☆☆
2.《解題關鍵》關鍵字：多餘觀測數，觀測方程式。 重點提要：間接觀測平差。
3.《命中特區》書名：誤差理論及實務 (原：測量平差法) 作者：賴明 章節出處：第五章 間接觀測平差 之 二、等權間接觀測平差

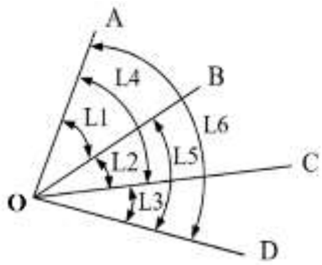
【擬答】

㈠計算多餘觀測數

觀測數 n=6，未知數 u=3，多餘觀測數(自由度)=n-u=6-3=3

㈡列出相對應的觀測方程式

設；$\angle AOB=\theta_1$，$\angle BOC=\theta_2$，$\angle COD=\theta_3$



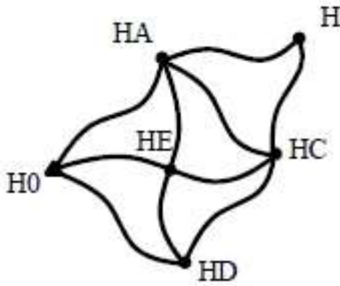
觀測方程式　　　改正數方程式

$$\begin{cases}L_1+v_1=\theta_1\\L_2+v_2=\theta_2\\L_3+v_3=\theta_3\\L_4+v_4=\theta_1+\theta_2\\L_5+v_5=\theta_2+\theta_3\\L_6+v_6=\theta_1+\theta_2+\theta_3\end{cases}，\begin{cases}v_1=\theta_1-L_1\\v_2=\theta_2-L_2\\v_3=\theta_3-L_3\\v_4=\theta_1+\theta_2-L_4\\v_5=\theta_2+\theta_3-L_5\\v_6=\theta_1+\theta_2+\theta_3-L_6\end{cases}，V=AX-L$$

$$V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\end{bmatrix}，A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}，X=\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\end{bmatrix}，L=\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\\L_6\end{bmatrix}$$

三、請計算下圖水準網之自由度（假設高程差觀測測線如圖中所示），並列式說明如何計算出 A、B 兩點之高程值。（25 分）



1.《考題難易》★★★★☆
2.《解題關鍵》關鍵字：自由度，高程。重點提要：條件觀測平差。
3.《命中特區》書名：誤差理論及實務 (原：測量平差法)
作者：賴明
章節出處：第六章 條件觀測平差 之 二、條件方程式之求解與精度分析

【擬答】

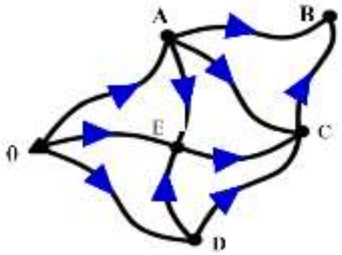
㈠計算水準網之自由度

已知量：0 點高程。未知量：A,B,C,D,E 點高程，未知數=5，觀測數=10，自由度=10-5=5

㈡計算出 A、B 兩點之高程值的方法

使用條件觀測平差。

假設：高程差觀測測線的方向如圖所示。



各測線進行方向及高程差，如下表所示

序號	進行方向	高程差
1	0→A	Δh_{0A}
2	A→B	Δh_{AB}
3	0→E	Δh_{0E}
4	A→E	Δh_{AE}
5	A→C	Δh_{AC}
6	E→C	Δh_{EC}
7	0→D	Δh_{0D}
8	D→E	Δh_{DE}
9	D→C	Δh_{DC}
10	C→B	Δh_{CB}

觀測方程式計有：

1. 閉合圈 1 (Loop 1)：0→A→E

$(\Delta h_{0A}+v_1)+(\Delta h_{AE}+v_4)-(\Delta h_{0E}+v_3)=0$，$v_1-v_3+v_4+(\Delta h_{0A}+\Delta h_{AE}-\Delta h_{0E})=0$

2. 閉合圈 2 (Loop 2)：A→E→C

$(\Delta h_{AE}+v_4)+(\Delta h_{EC}+v_6)-(\Delta h_{AC}+v_5)=0$，$v_4-v_5+v_6+(\Delta h_{AE}+\Delta h_{EC}-\Delta h_{AC})=0$

3. 閉合圈 3 (Loop 3)：A→C→B

$(\Delta h_{AC}+v_5)+(\Delta h_{CB}+v_{10})-(\Delta h_{AB}+v_2)=0$，$-v_2+v_5+v_{10}+(\Delta h_{AC}+\Delta h_{CB}-\Delta h_{AB})=0$

4. 閉合圈 4 (Loop 4)：0→D→E

$(\Delta h_{0D}+v_7)+(\Delta h_{DE}+v_8)-(\Delta h_{0E}+v_3)=0$，$-v_3+v_7+v_8+(\Delta h_{0D}+\Delta h_{DE}-\Delta h_{0E})=0$

5. 閉合圈 5 (Loop 5)：D→E→C

$(\Delta h_{DE}+v_8)+(\Delta h_{EC}+v_6)-(\Delta h_{DC}+v_9)=0$，$v_6+v_8-v_9+(\Delta h_{DE}+\Delta h_{EC}-\Delta h_{DC})=0$

$$\begin{cases} v_1 - v_3 + v_4 + (\Delta h_{0A} + \Delta h_{AE} - \Delta h_{0E}) = 0 \\ v_4 - v_5 + v_6 + (\Delta h_{AE} + \Delta h_{EC} - \Delta h_{AC}) = 0 \\ -v_2 + v_5 + v_{10} + (\Delta h_{AC} + \Delta h_{CB} - \Delta h_{AB}) = 0 \\ -v_3 + v_7 + v_8 + (\Delta h_{0D} + \Delta h_{DE} - \Delta h_{0E}) = 0 \\ v_6 + v_8 - v_9 + (\Delta h_{DE} + \Delta h_{EC} - \Delta h_{DC}) = 0 \end{cases}$$

條件方程式

使用條件觀測平差法，求解 v_i　$i=1,2,\ldots,10$

則；A 點高程 $H_A=H_0+\Delta h_{0A}+v_1$　　B 點高程 $H_B=H_A+\Delta h_{AB}+v_2$

四、請由線性化觀測方程式出發，推導間接觀測平差未知參數之估計公式，需列出完整推導過程與假設條件。（25 分）

1.《考題難易》★★★★☆
2.《解題關鍵》關鍵字：線性化觀測方程式，間接觀測平差。
重點提要：公式推導與假設條件。
3.《命中特區》書名：誤差理論及實務 (原：測量平差法)
作者：賴明
章節出處：第五章 間接觀測平差　之　二、等權間接觀測平差

【擬答】

以等權間接觀測平差為例：

設 $L_1,L_2,\ldots,L_m$ 為 m 個獨立觀測量，n 個待定的未知參數為 $x_1,x2,\ldots,x_n$，觀測量的相應改正數為 $v_1,v_2,\ldots,v_m$。

㈠最或是值

由觀測量可建構觀測方程 (Observational Equation)

$$\begin{cases} L_1 + v_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ L_2 + v_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ L_m + v_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad \ldots (1)$$

m：方程式總數；n：未知數總數；$m \geqq n$

改正數方程式(Residual Equation)：

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - L_1 \\ v_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - L_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ v_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - L_n \end{cases} \quad \ldots (2)$$

寫成矩陣式：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$ ，或是

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$

亦即，改正數方程式為：$[v_i]=[a_{ij}]\times[x_j]-[L_i]$，$V=AX-L$　　(4-1)

式中；A 為設計矩陣(Design Matrix)。X 為未知量向量(Unknown Vector)。

L 為常數(不符值)向量(Constant Vector)。V 為改正數向量

(二)高斯最小二乘法

依高斯最小二乘法之定義，如欲使 x 為最或是值，需 $[vv]$=最小值

即，$\frac{d}{dx}[vv]=0$

$$\because\quad [vv]=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=[v_1\quad v_2\quad \cdots\quad v_n]\times\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=[v_i]^T\times[v_i]$$

式中；$[v_i]^T$ 為 $[v_i]$ 之轉置矩陣(*Transposed Matrix*)（行元素⇆列元素）

$$\therefore\quad \frac{\partial[vv]}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left([v_i]^T\times[v_i]\right)=\frac{\partial[v_i]^T}{\partial x_j}\cdot[v_i]+[v_i]^T\cdot\frac{\partial[v_i]}{\partial x_j}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial[vv]}{\partial x_j}=2\frac{\partial[v_i]^T}{\partial x_j}\cdot[v_i]=0 \qquad (3)$$

$$\text{又，}\frac{\partial[v_i]}{\partial x_j}=\begin{bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} & \frac{\partial v_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=[a_{ij}]$$

$$\text{且，}\frac{\partial[v_i]^T}{\partial x_j}=\left(\frac{\partial[v_i]}{\partial x_j}\right)^T=[a_{ij}]^T \qquad (4)$$

將方程式(4-1)及(4)式，代入(3)式，得

$$\frac{\partial[vv]}{\partial x_j}=2\frac{\partial[v_i]^T}{\partial x_j}\cdot[v_i]=2[a_{ij}]^T\cdot\left([a_{ij}]\times[x_j]-[L_i]\right)=0$$

即，法方程式(*Normal Equation*)為

$$[a_{ij}]^T\cdot\left([a_{ij}]\times[x_j]-[L_i]\right)=0$$

或是　$[a_{ij}]^T\cdot[a_{ij}]\cdot[x_j]=[a_{ij}]^T\cdot[L_i]$，可寫為 $NX=U$，$X=N^{-1}U$

式中，$N=[a_{ij}]^T\cdot[a_{ij}]=A^TA$，稱為係數矩陣。

$X=[x_j]$，稱為未知量矩陣。

$U=[a_{ij}]^T\cdot[L_i]=A^TL$，稱為常量矩陣。

N^{-1}，稱為 N 矩陣之反矩陣(*Inverse Matrix*)。

(三)中誤差（標準差）

1. 誤差平方和 $[vv]=\Sigma v_i^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2+\cdots+v_m^2$

觀測值中誤差 $m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}}$　　n 為觀測量數目，u 為未知量數目。

2. 未知量中誤差

未知量 x_1 之中誤差 M_{x_1}：$\frac{{M_{x_1}}^2}{m^2}=N^{-1}$ 之 a_{11} 元素值

未知量 x_2 之中誤差 M_{x_2} ：$\dfrac{{M_{x_2}}^2}{m^2} = N^{-1}$ 之 a_{22} 元素值

未知量 x_3 之中誤差 M_{x_3} ：$\dfrac{{M_{x_3}}^2}{m^2} = N^{-1}$ 之 a_{33} 元素值，依此類推