

113 年特種考試地方政府公務人員及 離島地區公務人員考試試題

等 別：四等考試
類 科：測量製圖
科 目：誤差理論概要

賴明老師解題

一、試說明下列名詞的意義：（每小題 5 分，共 25 分）

- (一)精密度 (precision) 與準確度 (accuracy)
- (二)多餘觀測 (redundancy)
- (三)絕對誤差 (absolute error) 與相對誤差 (relative error)
- (四)獨立觀測 (independent observations)
- (五)標準差 (standard deviation) 與均方根誤差 (root mean square error)

1. 《考題難易》★★★
2. 《解題關鍵》關鍵字：精密度與準確度、多餘觀測、絕對誤差與相對誤差、獨立觀測、標準差與均方根誤差。
重點提要：解釋名詞。
3. 《命中特區》書名：誤差理論及實務 (原：測量平差法)
作者：賴明
章節出處：第一章 測量平差之基本觀念及原理

【擬答】

(一)精密度與準確度

1. 精密度 (precision)

一般係指觀測值互相接近的程度。反映觀測結果中，偶然誤差的大小程度，亦表示誤差分布的密集或離散的程度。統計上的意義：觀測值群體與其數學期望值的接近程度。常以標準誤差(中誤差) σ 為精密度的衡量標準。

2. 準確度 (accuracy)

係結合精密度與準確度的精度指標，表示觀測值偶然誤差與觀測結果系統誤差的綜合影響。統計的意義：觀測結果與其真值的接近程度。精確度是測量結果的優劣，亦即，測量測量成果與真值之間的差異。

(二)多餘觀測

1. 意義

一個三角形只需要觀測兩個內角，即可推算第三個內角。測量時，常觀測三個內角，其中，兩個內角觀測是必要觀測，另一個內角觀測稱為多餘觀測。如觀測量多於必要的觀測量，即為多餘觀測。又，多次重複觀測一段距離，其中一次觀測是必要觀測，其餘是多餘觀測。

2. 多餘觀測之目的：①提高未知數的精度；②估計觀測值與未知數(參數)的標準偏差(或精度)；③增加檢核錯誤觀測值的能力。

(三)絕對誤差 (absolute error) 與相對誤差 (relative error)

標準差(中誤差)之絕對值稱為絕對誤差。絕對誤差= $|\sigma|$

相對誤差=最或是值絕對誤差 $|\sigma|$ 與最或是值 \bar{L} 之比，為相對誤差 $=\frac{|\sigma|}{\bar{L}}$

標準差雖為衡量精度的最好標準，但在若干情況下，僅用標準誤差還不足以比較觀測值的好壞，如果用相對誤差則可以很明顯的比較。

(四)獨立觀測 (*independent observations*)

各觀測量之間，無任何依存關係，是為相互獨立的觀測，稱為獨立觀測，觀測值稱為獨立觀測值。例如：對單一未知量進行重複觀測，各次的觀測是獨立，各觀測值屬於獨立觀測值。如各觀測量之間，存在幾何或物理條件的約束，稱為非獨立觀測，觀測值稱為非獨立觀測值。例如：觀測平面多邊形的各內角，因為多邊形內角和 $=(n-2)\times 180^\circ$ 之幾何條件，即屬於非獨立觀測，各內角觀測值即為非獨立觀測值。

(五)標準差 (*standard deviation*) 與均方根誤差 (*root mean square error*)

1. 標準差

設 $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ 為 n 個觀測量

最或是值 (算數平均值) \bar{l} : $\bar{l} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{[l]}{n}$

誤差 $v_1 = l_1 - \bar{l}, v_2 = l_2 - \bar{l}, \dots, v_i = l_i - \bar{l}, \dots, v_n = l_n - \bar{l}$

誤差平方和 $[vv] = \sum_{i=1}^n v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ ，標準差 $\sigma = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$

2. 均方根誤差

假設： $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ 為 n 個觀測量，真值為 l_0

真誤差 $\varepsilon_1 = l_1 - l_0, \varepsilon_2 = l_2 - l_0, \dots, \varepsilon_i = l_i - l_0, \dots, \varepsilon_n = l_n - l_0$

真誤差平方和 $[\varepsilon\varepsilon] = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2$ ，

均方根誤差 $RMSE = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$

二、設圓周長為 L ，面積為 A ，現測得圓半徑 r 之最或是值及其中誤差為 $15.38 \pm 0.03m$ ，求：

(一)圓周長 L 之最或是值及其中誤差？(10分)

(二)面積 A 之最或是值及其中誤差？(15分)

1. 《考題難易》★★

2. 《解題關鍵》關鍵字：最或是值及其中誤差、圓周長、圓面積。

重點提要：誤差傳播定律之應用。

3. 《命中特區》書名：誤差理論及實務 (原：測量平差法)

作者：賴明

章節出處：第二章 誤差傳播定律及其應用

【擬答】

已知：圓半徑 r 之最或是值及其中誤差 $r \pm \sigma_r = 15.38m \pm 0.03m$

(一)計算圓周長 L 之最或是值及其中誤差

$$L = 2\pi r = 2\pi \times 15.38 = 96.635m$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(2\pi r) = 2\pi, \sigma_L = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial r}\right)^2 \times \sigma_r^2} = \pm 2\pi \times \sigma_r = \pm 2\pi \times 0.03 = \pm 0.188m$$

$$\therefore L \pm \sigma_L = 96.635m \pm 0.188m$$

(二) 計算面積 A 之最或是值及其中誤差

$$A = \pi r^2 = \pi \times 15.38^2 = 743.126m^2, \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\pi r^2) = 2\pi r$$

$$\sigma_A = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 \times \sigma_r^2} = \pm 2\pi r \times \sigma_r = \pm 2\pi \times 15.38 \times 0.03 = \pm 2.900m^2$$

$$\therefore A \pm \sigma_A = 743.126m^2 \pm 2.900m^2$$

公職

全方位智能學習系統



志光×學儒×保成

虛實整合 引你入勝



上課方式最多元

多元學習
新型態

突破傳統上課模式
學習不受環境影響

面授
學習

直播
學習

在家
學習

視訊
學習

- 學習零時差 | 同類科各班別，皆可同步直播上課
- 服務零死角 | 服務緊貼需求，隨時掌握學習狀況



考點掌握最全面

考試關鍵
不漏接

考前、考中及考後，皆享有
志光、學儒、保成專業服務

考前叮嚀影片

考前重點下載

線上即時解答

考後影音解題

依各區規劃為主，請洽全國門市

三、設有觀測向量 $S=[S_1, S_2, S_3]^T$ 的變方-協變方 (Variance-Covariance) 矩陣為：

$$D_s = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.0 \\ 0.2 & 2.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 3.0 \end{bmatrix}$$

試計算線性函數： $X=S_1+10S_2+5S_3+8$ 及 $Y=3S_1+8S_2+S_3+5$ 的變方值 σ_X^2 、 σ_Y^2 及協變方值 σ_{XY} 。

(25 分)

1. 《考題難易》★★★

2. 《解題關鍵》關鍵字：變方-協變方矩陣。重點提要：多變量函數之誤差傳播定律。

3. 《命中特區》書名：誤差理論及實務 (原：測量平差法)

作者：賴明

章節出處：第四章 多變量函數之誤差傳播 一、線性函數之誤差傳播與誤差估值

【擬答】

$$\frac{\partial X}{\partial S_1} = \frac{\partial}{\partial S_1}(S_1 + 10S_2 + 5S_3 + 8) = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial S_2} = \frac{\partial}{\partial S_2}(S_1 + 10S_2 + 5S_3 + 8) = 10$$

$$\frac{\partial X}{\partial S_3} = \frac{\partial}{\partial S_3}(S_1 + 10S_2 + 5S_3 + 8) = 5, \quad \frac{\partial Y}{\partial S_1} = \frac{\partial}{\partial S_1}(3S_1 + 8S_2 + S_3 + 5) = 3$$

$$\frac{\partial Y}{\partial S_2} = \frac{\partial}{\partial S_2}(3S_1 + 8S_2 + S_3 + 5) = 8, \quad \frac{\partial Y}{\partial S_3} = \frac{\partial}{\partial S_3}(3S_1 + 8S_2 + S_3 + 5) = 1$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial S_1} & \frac{\partial X}{\partial S_2} & \frac{\partial X}{\partial S_3} \\ \frac{\partial Y}{\partial S_1} & \frac{\partial Y}{\partial S_2} & \frac{\partial Y}{\partial S_3} \end{bmatrix} \times D_s \times \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial S_1} & \frac{\partial X}{\partial S_2} & \frac{\partial X}{\partial S_3} \\ \frac{\partial Y}{\partial S_1} & \frac{\partial Y}{\partial S_2} & \frac{\partial Y}{\partial S_3} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.0 \\ 0.2 & 2.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 3.0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 & 22.7 & 20.0 \\ 3.7 & 17.1 & 7.0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 329.7 & 209.7 \\ 209.7 & 154.7 \end{bmatrix}$$

變方值 $\sigma_X^2 = 329.7$ 、 $\sigma_Y^2 = 154.7$ 及協變方值 $\sigma_{XY} = 209.7$

志光×學儒×保成
多元學習模式 上課超便利

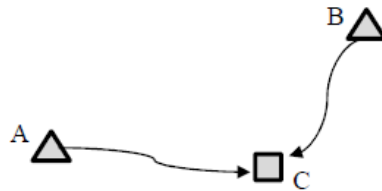
3 大學習式 你的最佳上榜學習式

<div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; background-color: #e0f2f1;"> <p>NO1 互動性 面授學習</p> <p>名師親臨授課，即時解答疑惑 同儕交流互動，提升學習氛圍</p> </div>	<div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; background-color: #e0f2f1;"> <p>NO1 超彈性 視訊學習</p> <p>課程隨選隨看，無限重覆看課 彈性跟課進度，自由調配時間</p> </div>	<div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; background-color: #e0f2f1;"> <p>NO1 自主度 函授學習</p> <p>免去舟車勞頓，連結雲端上課 不分白天夜晚，自主規劃進度</p> </div>
--	--	--

2 大輔助利器 滴水不漏快取金榜

<div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; background-color: #e0f2f1;"> <p>NO1 即時性 直播教學</p> <p>線上按時登入 現場直播跟課 立即掌握進度 無須等待視訊</p> </div>	<div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; background-color: #e0f2f1;"> <p>NO1 人性化 在家學習</p> <p>使用補課點數 家裡就是課堂 免去落課疑慮 強化複習次數</p> </div>
--	--

四、如圖所示的水準網（箭頭表觀測方向），已知 A、B 高程分別為 $H_a=37.46\text{m}$ 、 $H_b=43.31\text{m}$ ，C 為待求高程，經直接水準測量測得高程差 ΔH 以及水準路線長度 L 分別為 $\Delta H_{ac}=9.62\text{m}$ 、 $L_{ac}=4\text{km}$ ； $\Delta H_{bc}=3.76\text{m}$ 、 $L_{bc}=2\text{km}$ 。試以間接觀測平差矩陣解法求 C 點高程 H_c 。（25 分）



1. 《考題難易》★★
2. 《解題關鍵》關鍵字：水準網分析。重點提要：間接觀測平差。
3. 《命中特區》書名：誤差理論及實務（原：測量平差法）
作者：賴明
章節出處：第五章 間接觀測平差 之 三、加權（非等權）間接觀測平差

【擬答】

已知：水準路線長 L_i 。 $H_a=37.46\text{ m}$ 、 $H_b=43.31\text{ m}$ 。未知量： H_c

觀測數 $n=2$ ，未知數 $u=1$ ，自由度 $r=n-u=2-1=1$ 。

設； H_c 之初值 $H_{c0} = H_a + \Delta H_{ac} = 37.46 + 9.62 = 47.08\text{m}$

∴ 假設： $H_c = 47.08 + x$

1. 權 $P \propto \frac{1}{L}$ ， $P_1 : P_2 = \frac{1}{L_{ac}} : \frac{1}{L_{bc}} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 1 : 2$

2. 觀測方程式 $\begin{cases} \Delta H_{ac} + v_1 = H_c - H_a \\ \Delta H_{bc} + v_2 = H_c - H_b \end{cases}$ ， $\begin{cases} 9.62 + v_1 = 47.08 + x - 37.46 \\ 3.76 + v_2 = 47.08 + x - 43.31 \end{cases}$

3. 改正數方程式
$$\begin{cases} v_1 = x \\ v_2 = x + 0.01 \end{cases}$$

4. 以矩陣式表示： $V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, X = [x], L = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

5. 組法方程式： $NX = U$ ， $N = A^T PA$ ， $U = A^T PL$

$$N = [1 \ 1] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \ 2] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [3]$$

$$U = [1 \ 1] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0.01 \end{bmatrix} = [1 \ 2] \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0.01 \end{bmatrix} = [-0.02]$$

6. 計算反函數，得最佳估值 $X = N^{-1}U$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \end{bmatrix}, X = N^{-1}U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times [-0.02] = \begin{bmatrix} -\frac{0.02}{3} \end{bmatrix} = [-0.007] = [x]$$

$$\therefore C \text{ 點高程 } H_c = 47.08 - 0.007 = 47.073m$$