

113 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：機械工程

科 目：流體力學與工程力學

考試時間：2 小時

李函老師

一、今有一金屬球因重力作用在一黏性流體中以等速沉降。假設該球之沉降速度 V 較低，使得其運動方程式中之慣性力遠小於黏性力，故 V 只受流體之動力黏滯係數 (dynamic viscosity) μ ，以及金屬球之直徑 D 和單位體積淨受力 $(P_b - P_l)g$ 影響。前式中 P_b 與 P_l 分別為金屬球和流體之質量密度， g 為重力加速度。

(一)利用因次分析 (dimensional analysis)，試求沉降速度 V 與前述各參數[亦即 $\mu, D, (P_b - P_l)g$]之關係式。(15 分)

(二)設若一鐵球之比重 (specific gravity) 為 7.9，直徑為 0.3 cm，且在某一比重為 1.5 之流體中以某速度等速沉降。今若將鐵球換成比重 2.7 之鋁球，且欲使鋁球在相同流體中之沉降速度與原鐵球相同，試求鋁球應有之直徑。(5 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：流體力學之因次分析與白金漢 pi 理論之應用
3. 《命中特區》：流體力學第 7 章 7-1 因次分析

【擬答】：

(一)

(1)由題意可知 $V = f[\mu, D, (\rho_b - \rho_l)g]$ ，其中各變數之因次如下：

$$V \sim [LT^{-1}], \mu \sim [ML^{-1}T^{-1}], D \sim [L], (\rho_b - \rho_l)g \sim [ML^{-3}][LT^{-2}] = [ML^{-2}T^{-2}]$$

故有因次變數之個數 $k = 4$

(2)基本因次之個數 $r = 3(M、L、T)$

(3)選擇 $\mu、D、(\rho_b - \rho_l)g$ 為重複變數

(4) $k - r = 4 - 3 = 1 \Rightarrow$ 由於只有一個無因次參數，由白金漢 pi 定理可知此單一無因次參數必定為常數

(5)令 $V = \lambda \mu^a D^b [(\rho_b - \rho_l)g]^c$ ，其中 λ 為常數

$\therefore M^0 L^1 T^{-1} = [ML^{-1}T^{-1}]^a [L]^b [ML^{-2}T^{-2}]^c$ ，故由因次均一性可得

$$M: 0 = a + c \cdots \textcircled{1}$$

$$L: 1 = -a + b - 2c \cdots \textcircled{2}$$

$$T: -1 = -a - 2c \cdots \textcircled{3}$$

將①+③可得 $c = 1$ ，代入①可得 $a = -1$ ，再由②可得 $b = 2$

(6)無因次參數關係式為 $V = \lambda \mu^{-1} D^2 [(\rho_b - \rho_l)g]^1 = \lambda \frac{g D^2 (\rho_b - \rho_l)}{\mu}$

(二)

$$V_{\text{鐵球}} = V_{\text{鋁球}} \Rightarrow \left[\lambda \frac{g D^2 (\rho_b - \rho_l)}{\mu} \right]_{\text{鐵球}} = \left[\lambda \frac{g D^2 (\rho_b - \rho_l)}{\mu} \right]_{\text{鋁球}}$$

其中 λ 相同、 g 相同、 μ 相同、 $S = \frac{\rho}{\rho_{\text{水}}} \Rightarrow \rho = S \rho_{\text{水}}$

$$\therefore \left[D^2 (S_b \rho_{\text{水}} - S_l \rho_{\text{水}}) \right]_{\text{鐵球}} = \left[D^2 (S_b \rho_{\text{水}} - S_l \rho_{\text{水}}) \right]_{\text{鋁球}} \Rightarrow [D^2 (S_b - S_l)]_{\text{鐵球}} = [D^2 (S_b - S_l)]_{\text{鋁球}}$$

$$\text{故 } 0.003^2(7.9 - 1.5) = D_{\text{鉛球}}^2(2.7 - 1.5) \Rightarrow D_{\text{鉛球}} = 0.0069\text{m} = 0.69\text{cm}$$

二、如圖 1 所示，今有一圓形截面管，其長度 $L = 1.2\text{ m}$ ，直徑 $d = 0.003\text{ m}$ ，內壁粗糙度 (equivalent roughness) $\epsilon = 0.045\text{ mm}$ ，同時水從一自由液面高度 H 恆定且直徑 $D = 0.172\text{ m}$ 之容器經此圓管排出。假設圓管入口區之次要損失 (minor loss) 可以忽略，且管內截面平均流速 $V = 2\text{ m/s}$ ，試求容器內自由液面相對於圓管中心線之高度 H 。提示：水之運動黏滯係數 $\nu = 1.12 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ，同時管流摩擦因子 (friction factor) f 可利用下式計算：

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{\epsilon/d}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right],$$

式中 Re 為雷諾數 (Reynolds number)。(15 分)

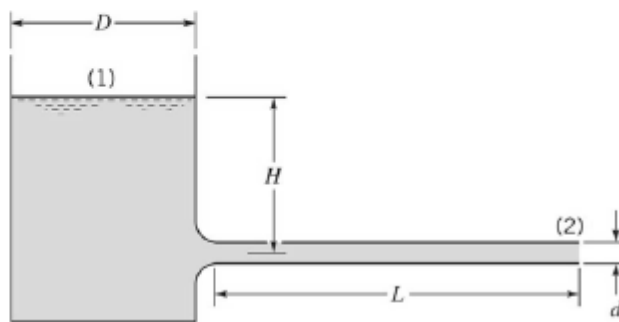


圖 1

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：流體力學之圓管紊流、能量方程式與摩擦損失之應用
3. 《命中特區》：流體力第 8 章 8-5 圓管紊流

【擬答】：

$$\text{由點(1)及點(2)間之能量方程式可得 } \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{L,M}$$

其中

$$\textcircled{1} P_1 = P_2 = P_{\text{atm}} = 0 \text{ (錶壓)}$$

$$\textcircled{2} V_2 = V = 2\text{ m/s}, Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow \frac{\pi D^2}{4} V_1 = \frac{\pi d^2}{4} V_2 \Rightarrow V_1 = \left(\frac{d}{D} \right)^2 V_2 = 0.0006\text{ m/s}$$

$$\textcircled{3} z_1 - z_2 = H$$

$$\textcircled{4} \text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = 5357, \frac{\epsilon}{d} = 0.015, \text{故 } \frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{0.015}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{5357} \right] \Rightarrow f = 0.051$$

$$\textcircled{5} h_{L,M} = f \frac{L V_2^2}{d 2g} = 4.16\text{ m}$$

$$\text{故將 } \textcircled{1} \sim \textcircled{5} \text{ 代回可得 } H = z_1 - z_2 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_{L,M} = 4.36\text{ m}$$

公職王歷屆試題 (113 高考三級)

三、如圖 2 所示，一根四分之一圓之懸臂梁外側面承受均勻壓力負載 p ，壓力 p 以單位弧長所受的力表示。試計算該懸臂梁固定支撐點 (fixed support) A 承受的正向力 N_A 、剪力 V_A 及彎曲力矩 M_A 。(15 分)

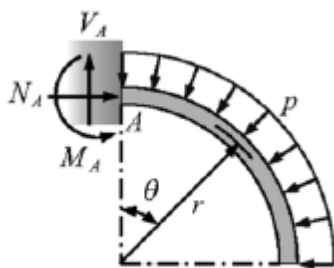


圖 2

1. 《考題難易》：★★★
2. 《解題關鍵》：自由體圖之分析、承受均布負載之懸臂梁分析
3. 《命中特區》：靜力學第 2 章 2-8 自由體圖、2-10 同平面平行力系

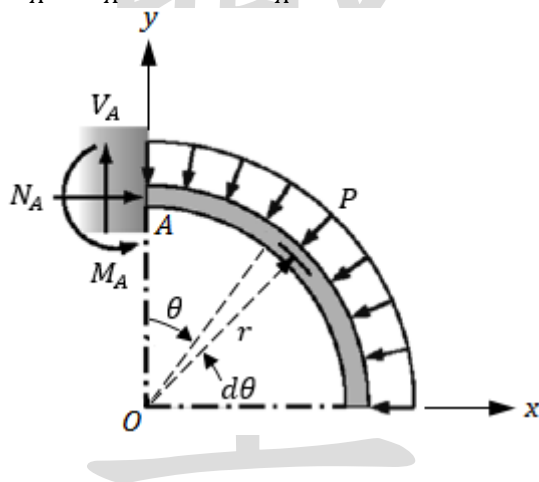
【擬答】：

$$\rightarrow, \sum F_x = 0 \Rightarrow N_A - \int_0^{\frac{\pi}{2}} Prd\theta \sin \theta = 0 \Rightarrow N_A = Pr$$

$$+\uparrow, \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - \int_0^{\frac{\pi}{2}} Prd\theta \cos \theta = 0 \Rightarrow V_A = Pr$$

$$+\curvearrowright, \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - \int_0^{\frac{\pi}{2}} Prd\theta (r \sin \theta) = 0 \Rightarrow M_A = Pr^2$$

另解： $+\curvearrowright, \sum M_O = 0 \Rightarrow M_A - N_A r = 0 \Rightarrow M_A = Pr^2$



四、如圖 3 所示，一丁字形角鐵由兩根相同質量 m 及長度 L 的均質圓棒銲接而成，其平面與鉛垂面平行，端點 A 銷支承 (pin support) 於天花板，端點 A 與質心 G 連線的水平傾角為 θ 。丁字形角鐵於 $\theta=0^\circ$ 處靜止釋放，重力加速度以符號 g 表示。試問：

(一) 丁字形角鐵質心距 AG 及對 A 點的轉動慣量 (moment of inertia of mass)。(10 分)

(二) 當 $\theta=90^\circ$ 時，銷支承 A 施予丁字形角鐵的水平力及鉛垂力各是多少？(15 分)

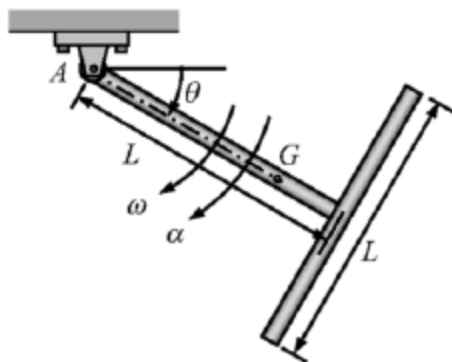


圖 3

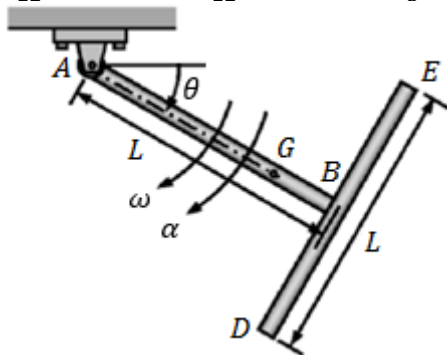
1. 《考題難易》：★★★★
2. 《解題關鍵》：組合體之質心與轉動慣量之分析、平面剛體動力學之應用
3. 《命中特區》：動力學第 6 章 6-4 繞固定軸旋轉之運動方程式

【擬答】：

(一)

$$(1) \overline{AG} = \frac{m(\frac{L}{2}) + mL}{2m} = \frac{3}{4}L$$

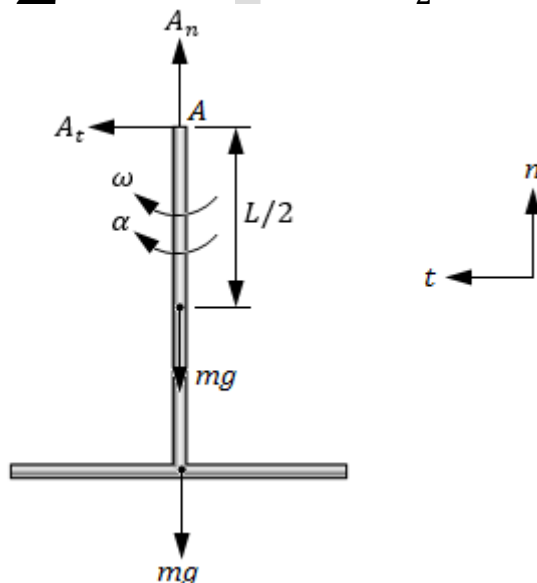
$$(2) (I_{AB})_A = \frac{mL^2}{3}, (I_{DE})_A = \frac{mL^2}{12} + mL^2 = \frac{13mL^2}{12}, \text{ 故 } I_A = \frac{mL^2}{3} + \frac{13mL^2}{12} = \frac{17}{12}mL^2$$



(二)

$$\leftarrow, \sum F_t = \sum ma_t = \sum mr\alpha \Rightarrow A_t = m\frac{L}{2}\alpha + mL\alpha = \frac{3m\alpha L}{2}$$

$$+\uparrow, \sum F_n = \sum ma_n = \sum mr\omega^2 \Rightarrow A_n - 2mg = m\frac{L}{2}\omega^2 + mL\omega^2 \Rightarrow A_n = \frac{3m\omega^2 L}{2} + 2mg$$



公職王歷屆試題 (113 高考三級)

五、如圖 4(a)所示，兩個尺寸、材質相同的均勻圓柱體堆疊於無摩擦地板。兩者的截面積為 A 、彈性係數為 E 及單位體積的重量為 $\gamma = \rho g$ ，此處， ρ 為質量密度， g 為重力加速度。若兩圓柱體未受應力作用前的原始長度為 L ，參考圖 4(b)所示，試問：

(一)兩圓柱體在 x_1 及 x_2 截面的軸向壓力 $F_1(x_1)$ 與 $F_2(x_2)$ ？ (10 分)

(二)兩圓柱體受重力壓縮後的長度分別減少 Δ_1 與 Δ_2 ？ (15 分)

(提示：單軸應力、變形關係 $\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$ ， σ_x 、 ϵ_x 與 u 為單軸應力、應變及位移。)

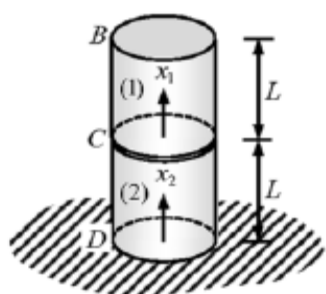


圖 4(a)

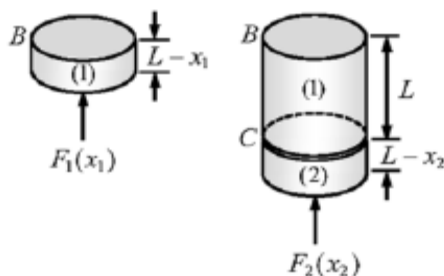


圖 4(b)

1. 《考題難易》：★★★
2. 《解題關鍵》：分別取自由體圖，由力平衡方程式求軸向壓力，再由分段積分求變形量。
3. 《命中特區》：材料力學第 2 章 2-1 軸向負載構件之彈性變形

【擬答】：

(一)

取距 C 點 x_1 處之自由體圖，如圖 4(b) 之左圖所示，故由垂直 (y) 方向之力平衡方程式可得

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1(x_1) - W_1 = 0 \Rightarrow F_1(x_1) = W_1 = \gamma V_1 = \rho g A (L - x_1)$$

取距 D 點 x_2 處之自由體圖，如圖 4(b) 之右圖所示，故由垂直 (y) 方向之力平衡方程式可得

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_2(x_2) - W_2 = 0 \Rightarrow F_2(x_2) = W_2 = \gamma V_2 = \rho g A [L + (L - x_2)] = \rho g A (2L - x_2)$$

(二)

$$\Delta_1 = \Delta_{BC} = \int_0^L \frac{F_1(x_1)}{AE} dx_1 = \int_0^L \frac{\rho g A (L - x_1)}{AE} dx_1 = \frac{\rho g}{E} \int_0^L (L - x_1) dx_1 = \frac{\rho g L^2}{2E}$$

$$\Delta_2 = \Delta_{CD} = \int_0^L \frac{F_2(x_2)}{AE} dx_2 = \int_0^L \frac{\rho g A (2L - x_2)}{AE} dx_2 = \frac{\rho g}{E} \int_0^L (2L - x_2) dx_2 = \frac{3\rho g L^2}{2E}$$

站上工科巔峰

電力工程

電子工程

機械工程

電信工程

112高普考&111地方特考 TOP10 強勢上榜

狀元	榜眼	探花
高考 電力工程 許○軒 高考 電子工程 郭○瑞	普 考 電力工程 許○軒 地特三等(台北市) 電子工程 郭○瑞 地特四等(台北市) 電力工程 張○境	普 考 電力工程 呂○勳 地特四等(台北市) 電子工程 楊○榮 地特四等(高雄市) 電子工程 何○宇

【全國第四】 普 考 電力工程 林○彬

【全國第五】 普 考 電力工程 莊○鈞

【台北市第五】 地特三等 電子工程 薛○文

【全國第六】 普考 電信工程 朱○萱

【全國第七】 普考 電子工程 王○延

【全國第八】 高考 電力工程 林○彬

【全國第八】 高考 電子工程 黃○源

【全國第八】 普考 電子工程 黃○軒

【全國第十】 高考 機械工程 徐○甫

優秀考取 菁英薈萃

高考 電力工程 孫○勝	高考 電力工程 陳○文	普考 電力工程 蔡○穎	高考 電子工程 林○陞	高考 機械工程 翁○駿	普考 機械工程 翁○駿
高考 電力工程 呂○勳	高考 電力工程 汪○懷	普考 電力工程 王○宏	普考 電子工程 鄭○棠	高考 機械工程 賴○儒	普考 機械工程 徐○甫
高考 電力工程 郭○謙	高考 電力工程 蔡○穎	普考 電力工程 賴○允	普考 電子工程 蔡○恩	高考 機械工程 張○傑	普考 機械工程 陳○昇
高考 電力工程 林○佑	高考 電力工程 羅○璋	普考 電力工程 蔡○翰	普考 電子工程 林○仁	普考 機械工程 余○緯	普考 機械工程 高○倫
高考 電力工程 許○騰	普考 電力工程 郭○宗	普考 電力工程 陳○萱	普考 電子工程 郭○謙	普考 機械工程 官○麟	普考 機械工程 應○宏
高考 電力工程 莊○鈞	普考 電力工程 孫○勝	高考 電子工程 蔡○典	普考 電子工程 賴○惠	普考 機械工程 廖○瑄	普考 機械工程 黃○吉
高考 電力工程 王○宏	普考 電力工程 蔡○祐	高考 電子工程 周○明	普考 電子工程 林○陞	普考 機械工程 陳○宏	普考 機械工程 盧○方
				普考 機械工程 賴○儒	普考 機械工程 張○傑

版面有限 無法一一刊登

職王