

113 年公務人員高等考試三級考試試題

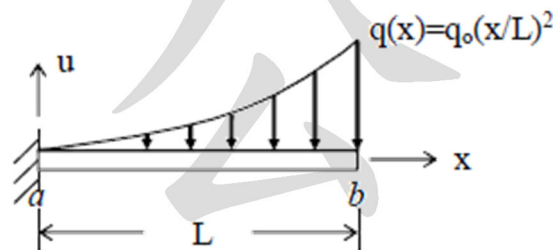
等 別：三等

類 科：土木工程

科 目：材料力學

邱鴻昇老師解題

一、參考(圖 1)之方向定義，試寫出梁的撓曲變形函數 $u(x)$ 與分布載重 $q(x)$ 之間的關係式，並列舉有關此式至少三個基本假設。試以此關係式出發，推導圖 1 左端固定之懸臂梁撓曲變形函數，以及梁右端點 b 之順時針旋轉傾斜角 θ 與垂直向下位移 Δ 。令 EI 為此梁之撓曲剛度， q_0 為載重係數，兩者皆為常數。(25 分)



(圖 1)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》

原題已提示由載重方程式進行運算，本題了解各方程式的邊界條件，即可求解，另需注意給定之座標，Y 方向朝上為正。

【擬答】

(一) 計算撓曲變形函數 $u(x)$

基本假設：(1) 均質、線彈性材料。

(2) 平面保持平面。

(3) 假設變形微小。

$$\text{由 } y'''' = -\frac{q(x)}{EI} = -\frac{q_0}{EIL^2} \cdot x^2$$

$$\Rightarrow y''' = V(x) = \int \frac{q(x)}{EI} = -\frac{q_0}{EIL^2} \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 ; V(L) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{q_0 \cdot L}{3EI}$$

$$\Rightarrow y'' = M(x) = \iint \frac{q(x)}{EI} = -\frac{q_0}{EIL^2} \cdot \frac{x^4}{12} + C_1 \cdot x + C_2 ; M(L) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{q_0 \cdot L^2}{4EI}$$

$$\Rightarrow y' = \theta(x) = \iiint \frac{q(x)}{EI} = -\frac{q_0}{EIL^2} \cdot \frac{x^5}{60} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3 ; \theta(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\Rightarrow y = u(x) = \iiint \frac{q(x)}{EI} = -\frac{q_0}{EIL^2} \cdot \frac{x^6}{360} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4 ; u(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

(二) 計算 b 點轉角 θ_b 及向下位移 Δ_b

$$\theta_b = \theta(L) = -\frac{q_0 \cdot L^3}{10EI} \text{ (順)}$$

$$\Delta_b = u(L) = -\frac{13q_0 \cdot L^4}{180EI} \text{ (↓)}$$

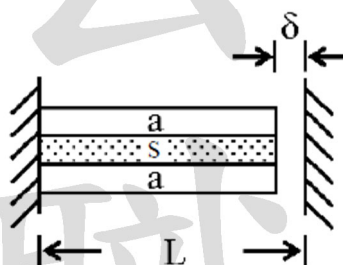
Ans :

$$u(x) = -\frac{q_0}{EI L^2} \cdot \frac{x^6}{360} + \frac{q_0 \cdot L}{3EI} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{q_0 \cdot L^2}{4EI} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\theta_b = -\frac{q_0 \cdot L^3}{10EI} (\text{順})$$

$$\Delta_b = -\frac{13q_0 \cdot L^4}{180EI} (\downarrow)$$

二、一根三夾板梁由兩種彈性材料組成，夾心層材料之彈性係數為 $E_s=200000\text{MPa}$ ，上下兩外層由材料 $E_a=50000\text{MPa}$ 所製成。各層具有矩形斷面，且各層之斷面積相同，皆為 $A=20\text{ mm}^2$ ，長度 $L=1200\text{ mm}$ 。心層與外層之熱膨脹係數分別為 $\alpha_s=1.0 \times 10^{-5}(1/^\circ\text{C})$ 與 $\alpha_a=2.0 \times 10^{-5}(1/^\circ\text{C})$ 。此梁將被安裝於兩剛性牆面之間，事先預留 $\delta=0.2\text{ mm}$ 之微小間隙使其暫不受力，如（圖 2）所示，此時若將溫度均勻提高 $\Delta T=20^\circ\text{C}$ ，試問升溫後組合梁內部所受之總軸力 F 為何？如果心層與外層之材料容許應力分別為 $\sigma_s=10.0\text{ MPa}$ 和 $\sigma_a=5.0\text{ MPa}$ ，則升溫上限為何？（25 分）



(圖 2)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★
2. 《破題關鍵》屬溫度變化常見題型，注意單位即可破題。

【擬答】

(一)計算各構件限制伸長量 Δ_a 及 Δ_s

$$\Delta_a = \alpha \cdot \Delta T \cdot L - 0.2 = 2.0 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 1200 - 0.2 = 0.28\text{mm}$$

$$\Delta_s = \alpha \cdot \Delta T \cdot L - 0.2 = 1.0 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 1200 - 0.2 = 0.04\text{mm}$$

(二)計算各構件受力 F_a 、 F_s 及總軸力 F

$$F_a = \Delta_a \cdot \frac{AE_a}{L} = 0.28 \cdot \frac{20 \cdot 50000}{1200} = 233.33\text{N}$$

$$F_s = \Delta_s \cdot \frac{AE_s}{L} = 0.04 \cdot \frac{20 \cdot 200000}{1200} = 133.33\text{N}$$

$$F = 2F_a + F_s = 0.04 \cdot \frac{20 \cdot 200000}{1200} = 599.99\text{N}(\text{壓})$$

(三)計算各構件溫升上限

$$\sigma_s = (\alpha_s \cdot \Delta T_s \cdot L - 0.2) \frac{E_s}{L} \Rightarrow \Delta T_s = 21.67^\circ\text{C}$$

$$\sigma_a = (\alpha_a \cdot \Delta T_a \cdot L - 0.2) \frac{E_a}{L} \Rightarrow \Delta T_a = 13.33^\circ\text{C}$$

Ans :

總軸力 $F = 599.99\text{N}$ 溫升上限 $\Delta T = 13.33^\circ\text{C}$

選擇志聖.志光.學儒.超級函授 選擇上榜

土木金榜創佳績

22大雙榜 14大狀元 13大榜眼 7大探花



楊○禮

高普考土木工程
專技高考土木技師

王○男

地特三等雲嘉區
地特四等雲嘉區

王○銘

專技高考土木工程
高考土木工程

吳○偉

高考土木工程
普考土木工程

田○妮

原特四等土木工程



許○捷

調查局三等
營繕工程組

林○宏

台電僱員東區
土木工程類

邱○慶

水利署灌溉
工程人員台東

黃○華

地特四等新北市



何○宇

水利署灌溉
工程人員宜蘭

洪○祥

水利署灌溉
工程人員嘉南

陳○晏

地特四等花東區



林○隆

檢察事務官
(營繕工程組)

林○豪

水利署灌溉
工程人員彰化

優秀考取



許○華

連續考取

112土木技師+高考土木工程

土木高考是CP值最高的公職考科, 我利用
晚上看課程(兼職Uber), 感謝家人的支持。

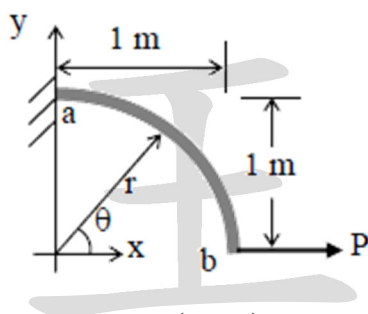
王○鈞

一年考取

高普考土木工程雙榜

補習班系統性的整理各科重點加上老師的講解,
讓更容易把考科吸收進大腦中。

- 三、圓弧形彎梁左端固定於剛性牆面，座標與尺寸標示如（圖 3），梁斷面為均勻實心方形 20mm×20mm 斷面，材料彈性係數 $E=200,000\text{MPa}$ ，柏松比 $\nu=0.25$ ，剪力係數 $G=80,000\text{MPa}$ ，現於梁之自由端施加一垂直於梁身之水平力 $P=20\text{ N}$ （x-方向），試計算點 a 處梁內最大法向應力 σ_{xx} 與點 b 處最大剪應力 τ_{xy} ，以及絕對最大法向應變 $\epsilon_{\max}$ 與絕對最大剪應變 $\gamma_{\max}$ 。（25 分）



(圖 3)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★
2. 《破題關鍵》

合成應力題型，給定 a 及 b 點計算，切勿讓 r 、 θ 座標迷惑了。

【擬答】

(一)由力平衡方程式，計算支承反力

$$\sum M_a = 0, M_a = P \cdot L = 20 \cdot (1) = 20(\text{N} \cdot \text{m})$$

$$\sum F_x = 0, R_{a,x} = P = 20(\text{N})(\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 0, R_{a,y} = 0$$

(二)計算 a 點正向應力 σ_{xx} 及 b 點剪應力 τ_{xy}

$$\sigma_{xx} = \frac{My}{I} + \frac{P}{A} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10}{20^4/12} + \frac{20}{20 \cdot 20} = 15.05(\text{MPa})$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{bI} = \frac{20 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 5}{20 \cdot 20^4/12} = 0.075(\text{MPa})$$

(三)計算應變及剪應變

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{15.05}{200000} = 7.525 \cdot 10^{-5}$$

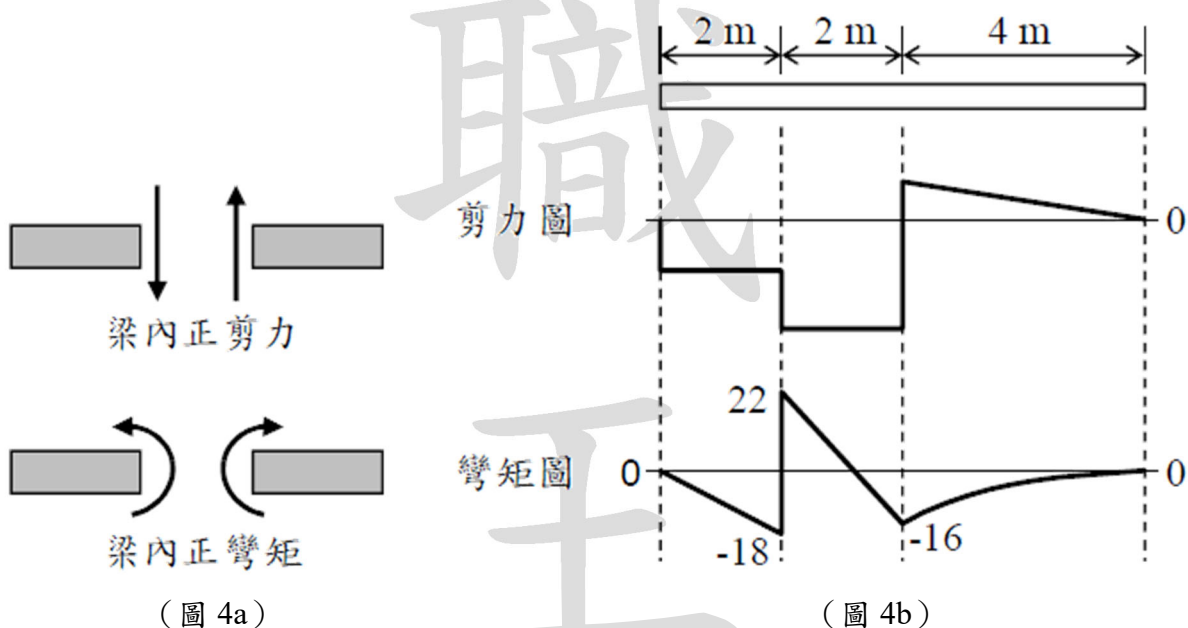
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{xx}}{2} = 7.525(\text{MPa}), \gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{7.525}{80000} = 9.406 \cdot 10^{-5}$$

Ans :

$$\sigma_{xx} = 15.05(\text{MPa}), \tau_{xy} = 0.075(\text{MPa})$$

$$\varepsilon_{max} = 15.05, \gamma_{max} = 9.406 \cdot 10^{-5}$$

四、一水平梁承受若干垂直力與平面內力矩，梁斷面內正值之剪力與彎矩定義如（圖 4a），其剪力圖（單位 kN）與彎矩圖（單位 kN·m）示意如（圖 4b），試完成剪力圖並推估此梁之所有受力與力矩。（25 分）



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★

2. 《破題關鍵》

熟悉載重、剪力、彎矩關係，即可破題，惟計算式需視情況補充。

【擬答】

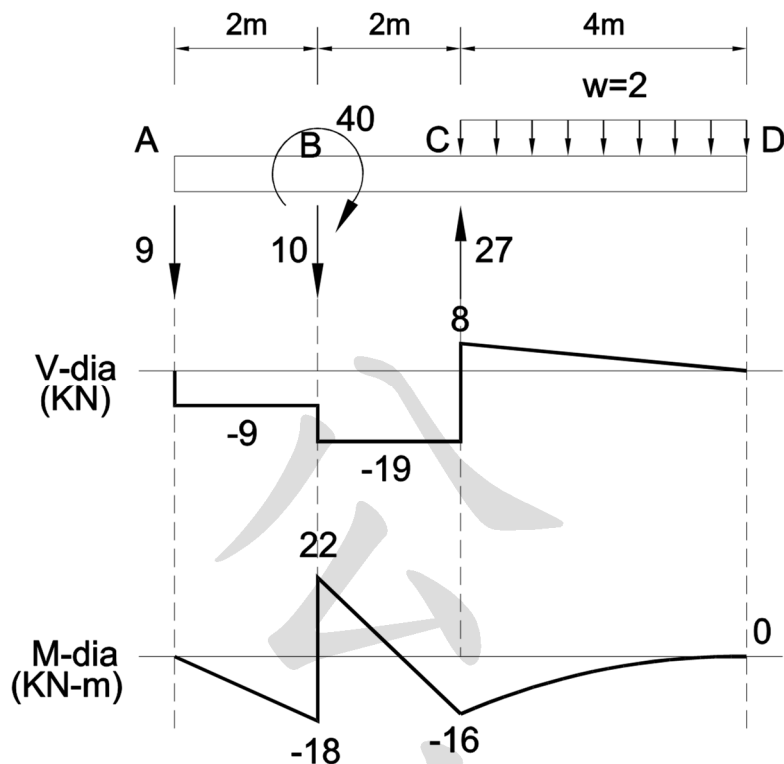
(一)由彎矩圖，計算剪力圖及載重

已知斷面彎矩(M)、剪力(V)及載重(w)之關係式： $\frac{dV}{dx} = -w$ ， $\frac{dM}{dx} = V$

$$\text{由 } \int dM = \int V dx \Rightarrow M_B = \int V_{AB} dx, \text{ 得 } V_{AB} = -9$$

$$\text{由 } \int dM = \int V dx \Rightarrow M_C = \int V_{BC} dx, \text{ 得 } V_{BC} = -19$$

$$\text{由 } \int dM = \int V dx \Rightarrow M_D = \int V_{CD} dx, \text{ 得 } V_C = 8$$



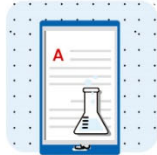
[志聖土木 × 超級函授] 全方位學習再進化!

線上上課+課後複習 超便利! ♡服務加倍♡學習加倍♡便利加倍

雲學習端 超彈性 /



完整課程 上榜沒問題!



24hr 雲端 線上隨時上課



申論練筆 名師批閱指導



線上課業諮詢 專屬APP



中華電信 智能雲端平台

我們全力提供更好的學習 /



國考技巧 打造上榜力